תעודת זהות:203835806

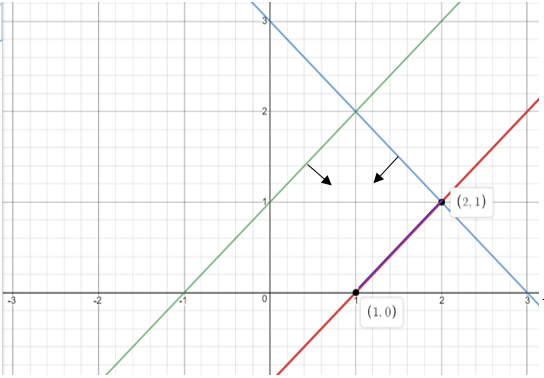
שם משפחה: טרכטמן   
שם פרטי: ליאור  
מרצה: ד"ר ראובן חוטובלי  
קבוצה: יום ראשון 08:00-12:00, יום שני 08:00-10:00  
  
תעודת זהות: 204217533

שם משפחה: טבג'ה  
שם פרטי: דניאל  
מרצה: ד"ר מריה ארטישצ'ב-זפולוצ  
קבוצה: יום שני 14:00-16:00, יום רביעי 14:00-18:00

**עבודת הגשה מס' 1 תכנון וניתוח אלגוריתמים:**

**שאלה 1:**

1. להלן שרטוט של תחום הפתרונות האפשריים:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Z* | *X*2 | *X*1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

להלן נקודות החיתוך אשר מקיימות את האילוצים הן:

ניתן לראות לפי הטבלה את הפתרון האופטימלי (2,1)

1. להלן המערכת לפי שיטת הסימפלקס (M הגדול):

**Maximize** *Z* =*X*1 + *X*2 - *MY*1

**Subject to:**

1)  *X*1 - *X*2 + Y1 = 1

2) *X*1 + *X*2 + *S*1 = 3

3) *-X*1 + *X*2 +  *S*2= 1

4) *X*1 0 5) *X*2 0 6) *Y*1 0

להלן השתלשלות אירועים של טבלת הסימפלקס:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X1 | X2 | Y1 | S1 | S2 | b | bi / aik |
| Y1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| S1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 3 |
| S2 | -1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |  |
|  | -M-1 | M-1 | 0 | 0 | 0 | -M | Z = |

במקרה זה:

X1 = 0 משתנה זה אינו נמצא בבסיס ולכן ערכו הוא אפס

X2 = 0 משתנה זה אינו נמצא בבסיס ולכן ערכו הוא אפס

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X1 | X2 | Y1 | S1 | S2 | b | bi / aik |
| X1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 |  |
| S1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1- | 2 | 1 |
| S2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |  |
|  | 0 | 2- | 0 | 0 | M+1 | 1 | Z = |

במקרה זה:

X1 = 1 משתנה זה נמצא בבסיס וערכו 1

X2 = 0 משתנה זה אינו נמצא בבסיס ולכן ערכו הוא אפס

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X1 | X2 | Y1 | S1 | S2 | b | bi / aik |
| X1 | 1 | 0 | 0.5 | 0 | 0.5 | 2 |  |
| X2 | 0 | 1 | 0.5 | 0 | 0.5- | 1 |  |
| S2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |  |
|  | 0 | 0 | 1 | 0 | M | 3 | Z = |

על סמך הטבלה הגענו לפתרון האופטימאלי שכן כל הערכים בשורה ה-**C’j**

חיוביים ולכן הערך האופטימאלי יתקבל בנקודה שבה:

בבסיס: X1 = 2 , X2 = 1 ,S2 = 2,Z = 3

לא בבסיס: Y1 = S1 = 0

1. להלן הגדרת הבעיה הדואלית:

**Minimize** *V* =*Y*1 + *3Y*2 +*Y*3

**Subject to:**

1)  *-Y*1 + *Y*2 +*Y*3  1

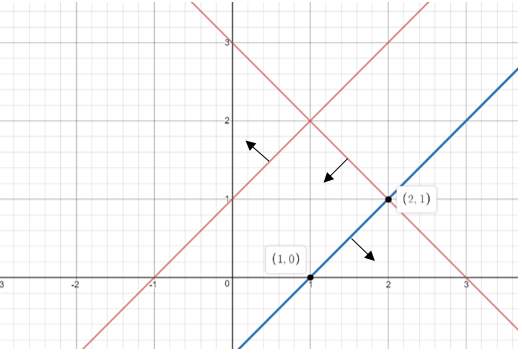
2) *Y*1 + *Y*2 -*Y*3  1

3) *Y*1, 2, 3 0

1. מהטבלה האחרונה בשיטת הסימפלקס נקבל שהפתרון הוא , כיוון שצריך להתקיים .

**שאלה 2:**

1. להלן שרטוט של תחום הפתרונות האפשריים:



לבעיה זאת אין נקודות חיתוך בתחום שמקיימות את האילוצים ולכן אין פתרון.

1. להלן המערכת לפי שיטת הסימפלקס (M הגדול):

**Maximize** *Z* =*X*1 + *X*2 - *MY*1- *MY*2

**Subject to:**

1)  *X*1 - *X*2 – *S*1 + *Y*1  1

2) *X*1 + *X*2 + *S*2  3

3) *-X*1 + *X*2 +  *-S*3  *Y*21

4) *X*1 0 5) *X*2 0 6) *Y*1 7) *Y*2 

להלן השתלשלות אירועים של טבלת הסימפלקס:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X1 | X2 | S1 | S2 | S3 | Y1 | Y2 | b | bi / aik |
| Y1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| *S*2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 |
| Y2 | 1- | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 |  |
|  | -1 | -1 | M | 0 | M | 0 | 0 | -2M | Z = |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X1 | X2 | S1 | S2 | S3 | Y1 | Y2 | b | bi / aik |
| X1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |  |
| *S*2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 2 | 1 |
| Y2 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 2 |  |
|  | 0 | -2 | M-1 | 0 | M | 1 | 0 | -2M+1 | Z = |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X1 | X2 | S1 | S2 | S3 | Y1 | Y2 | b | bi / aik |
| X1 | 1 | 0 | -0.5 | 0.5 | 0 | 0.5 | 0 | 2 |  |
| X2 | 0 | 1 | 0.5 | 0.5 |  | -0.5 | 0 | 1 |  |
| Y2 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 2 |  |
|  | **0** | **0** | **M-1** | **0** | **M** | **1** | **0** | **Z=-2M+3** | Z = |

ניתן לראות כי כל המשתנים בשורה של Z ערכם חיובי, ואין צורך למצוא משתנה נוסף שניתן להיכנס אותו לבסיס. אך ניתן לראות כי Y2 נמצא בבסיס וערכו חיובי משמע אינו אפס וזה עומד **בסתירה לדרישה שבסיום הסימפלקס לא ישארו משתנים מלאכותיים בסיס.** **לכן, אין פתרון.**

1. להלן הגדרת הבעיה הדואלית:

**Minimize** *V* =*-Y*1 + *3Y*2 -*Y*3

**Subject to:**

1)  *-Y*1 + *Y*2 +*Y*3  1

2) *Y*1 + *Y*2 -*Y*3 1

3) *Y*i 0

להלן המערכת המתאימה לשיכון המשתנים בטבלת הסימפלכס:

**Minimize** *V* =*-Y*1 + *3Y*2 -*Y*3 + *MX*1 + *MX*2

**Subject to:**

1)  *-Y*1 + *Y*2 +*Y*3 – *S*1 + *X*1  1

2) *Y*1 + *Y*2 -*Y*3 – *S*2 +*X*2 1

3) *Y*i 0

להלן השתלשלות אירועים של טבלת הסימפלקס:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Y1 | Y2 | Y3 | *S*1 | *S*2 | X1 | X2 | b | bi / aik |
| X1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| X2 | 1 | 1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
|  | 1 | 2M-3 | 1 | -M | -M | 0 | 0 | 2M | Z = |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Y1 | Y2 | Y3 | *S*1 | *S*2 | X1 | X2 | b | bi / aik |
| Y2 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 |  |
| X2 | 2 | 0 | -2 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
|  | 2M-2 | 0 | -2M+4 | -M-3 | -M | 3-2M | 0 | 3 | Z = |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Y1 | Y2 | Y3 | | *S*1 | *S*2 | X1 | X2 | b | bi / aik |
| Y2 | 0 | 1 | 0 | 0.5- | | -0.5 | 0.5 | 0.5 | 1 |  |
| Y1 | 1 | 0 | -1 | 0.5 | | -0.5 | -0.5 | 0.5 | 0 |  |
|  | 0 | 0 | 2 | -2 | | -1 | -M-2 | -M+1 | 3 | Z = |

המשתנה שאמור להיכנס הוא y3 אבל כל העמודה שלו מכילה 0 או מספרים שליליים, לכן המשתנה לא יכול להיכנס לבסיס. **לכן הפתרון לא חסום.**

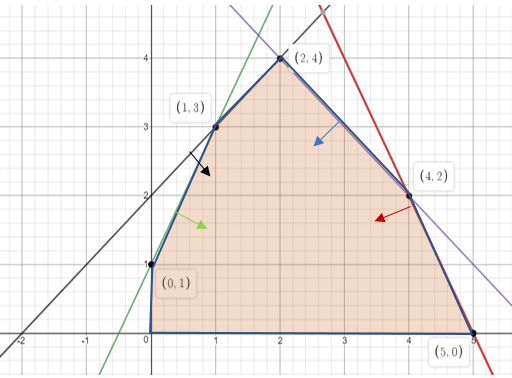
**שאלה 3:**



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| F | E | D | C | B | A |
| 5 | 186 | 0 | 1 | 0 | 0 |

1. (4) – לבעיה יש פתרון לא חסום

**שאלה 4:**



1. **עבור (5,0) יהיה הפתרון האופטימלי.**
2. **עבור (4,2) יהיה הפתרון האופטימלי.**
3. **נקבל עבור (2,4) יהיה הפתרון האופטימלי.**
4. **לא קיים ערך העונה על הדרישה.**

**שאלה 5:**

1. X2, X3, X7הם המשתנים הנמצאים בבסיס לפי האיטרציה האחרונה של הסימפלקס, ערכם הוא: X2 = 4 X3 =5 X7 =11

יתר המשתנים אינם בבסיס ולכן ערכם הוא אפס. ערכה של פונקצית המטרה הוא: Z = 11.

1. הפתרון בסעיף א הוא פתרון יחיד מכיוון שניתן לראות בשורה Z, המשתנים שבסיס ערכם הוא אפס והמשתנים שאינם בסיסים ערכם גדול מאפס ואין צורך לבצע עוד איטרציה בטבלה לכן, זהו פתרון יחיד.

**Minimize** Z = 7y1 + 12y2 + 10y3

**Subject to:**

1) y1 - y2 - y3 ≥ -2

2) 3y1 - 2y2 - 4y3 ≥ -1

3) -y1 + 4y2 + 3y3 ≥ 3

4) 2y1 + 8y3 ≥ -2

5) y1 ≥ 0 6) y2 ≥ 0 7) y3 ≥ 0

הפתרון מתקבל מערכי המקדמים של המשתנים שנוספו בסעיף א', כלומר:

וערך פונקציית המטרה האופטימלי הוא: Z = 11.

**שאלה 6:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| שאלה/תשובה | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 |  |  | X |  |
| 2 |  |  | X |  |
| 3 |  | X |  |  |
| 4 |  | X |  |  |
| 5 |  | X |  |  |
| 6 |  |  |  | X |

**שאלה 7:**

max {Z= + 2 + } max { Z= + 2 }

1) *X*1 + *X*2 – *X*3 ≤ 2 1) *X*1 + *X*2 – *X*3 ≤ 2

2) *X*1 - *X*2 + *X*3 = 1 2) *X*1 - *X*2 + *X*3  1

3) 2*X*1 + *X*2 + *X*3 ≥ 2 3) -2*X*1 - *X*2 - *X*3 -2

*X*1 ≥ 0 ,*X*2 ≤ 0 *X*1 ≥ 0 , *X*2 ≤ 0

-∞ ≤ *X*3 ≤ ∞ -∞ ≤ *X*3 ≤ ∞

נעביר את הבעיה הפרימלית לצורה סטנדרטית:

נהפוך סימן באילוץ 3 ונקבל

**א.**

הבעיה הדואלית לבעיה הנתונה:

min {V= }

1) *y*1 + *y*2 – 2*y*3 ≥ 1

2)  *y*1 – *y*2 – *y*3 ≤ 2

3) *-y*1 + *y*2 – *y*3 = 1

*y*1 ≥ 0 , *y*3 0

-∞ ≤ *y*2 ≤ ∞

**ב.**

נבדוק את הנקודה (0,1,0) באילוצים ונקבל:

1. תקין
2. תקין

, -∞ ≤ *1* ≤ ∞ תקין

זהו פתרון אפשרי לבעיה הדואלית המוצגת בסעיף א'.

**ג.**

בבעיה הפרימלית בצורה הסטנדרטית האילוץ ה-2 גדול מפונקציית המטרה ב 3X2

ומתקיים ש . האילוץ שווה ל- 1 וגדול מפונקציית המטרה אז בהכרח פונקציית המטרה קטנה שווה מ 1, גם Z\* שזהו הערך האופטימלי של הבעיה הנתונה יהיה קטן שווה מ-1, כלומר

נציב את הנקודה (1,0,0) בבעיה הפרימלית הנתונה בפונקציית המטרה ונקבל .

בסעיף הקודם הוכחנו שהערך האופטימלי של הבעיה הפרימלית הוא קטן שווה מ 1.

כאן קיבלנו שהערך שווה 1 לכן הוא אופטימלי ו**לכן (1,0,0) הוא פתרון אופטימלי.**

**שאלה 8:**

בעיה פרימלית של תכנון לינארי

A מטריצה סימטרית, כלומר

נתון וקטור אפשרי v לבעיה המקיים: Av=c, נראה כי v הוא פתרון אופטימלי.

נתבסס על משפט שאומר שאם (הערה) אז x, y פתרון אופטימלי לבעיה הדואלית והפרימלית. ניתן לראות ש b=c ממשפט הדואליות אזי

כלומר כי A מטריצה סימטרית ולכן במקום y נציב v ואז הוא אכן אופטימלי.

**הערה:** לכל פתרון אפשרי x של (P) ולכל פתרון אפשרי y של (D) מתקיים:

**שאלה 9:**

לפי הנתון כי הבסיס עבור הפתרון האופטימאלי הואניתן לבצע סימפלקס על הבעיה

הנתונה ולדרוש שהמשתנים יהיו בבסיס.

הבעיה הפרימאלית הקנונית: min {Z= }

לכן הבעיה הדואלית המתאימה היא: max {V= }

1)

2)

3)

4)

נמצאים בבסיס של הבעיה הפרימאלית ולכן ערכם שונה מאפס. לכן האילוצים 2 ו- 4 של

הבעיה הדואלית מתקיימים כשוויון.

כמו כן, מחיבור וחיסור המשוואות(אילוצים: 2,4) קיבלנו ש

כעת, נציב הראשון של הבעיה הדואלית:

לא נמצאים בבסיס ולכן ערכם אפס ולכן לפי אילוצים אלו נקבל:

כמו כן, מחיבור וחיסור המשוואות(אילוצים: 3,1) קיבלנו:

לפי אילוץ 3 של הבעיה הפרימאלית נקבל:

נציב באילוץ 3 של הבעיה הדואלית :

לסיכום :

min {Z= }

max {V= }

1)

2)

3)

הפתרון האופטימאלי יהיה :

בשביל לקבל את ערך הפונקציה המינימאלי תחת אילוץ 1 נדרוש לערך הקטן ביותר של ולכן:

. בגלל ש לא בבסיס ומקבל את הערך אפס אינו משפיע על הבעיה הפרימאלית.

נדרוש שיעמוד רק באילוץ 2 (אילוץ 3 של הבעיה הדואלית) :

בשביל לקבל את ערך הפונקציה המקסימאלי תחת אילוץ 3 נדרוש לערך הגדול ביותר של ולכן:

**שאלה 10:**

**א.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| היצע | יעדים  3 2 1 | | | מקורות |
| 100 | 17 | 15 | 10 | 1 |
| 110 | 14 | 18 | 10 | 2 |
| 100 | 18 | 20 | 15 | 3 |
|  | 100 | 120 | 90 | ביקוש |

**ב.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | היצע | יעדים  3 2 1 | | | מקורות |
| 2 | 200 | 17 | 15 | 12 | 1 |
| 0 | 100 | 14 | 18 | 10 | 2 |
| -8 | 150 | 18 | 10 | 20 | 3 |
|  |  | 100 | 150 | 200 | ביקוש |
|  |  | 26 | 18 | 10 |  |

**ג.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | היצע | יעדים  3 2 1 | | | מקורות |
| 0 | 180 | 17 | 15 | 14  3- | 1 |
| -7 | 100 | 14  4 | 8 | 10 | 2 |
| 1 | 100 | 18 | 20  4 | 15  3- | 3 |
|  |  | 130 | 150 | 100 | ביקוש |
|  |  | 17 | 15 | 17 |  |

מבחן האופטימליות ייבדק ע"י הפחתת עבור משתנים שאינם בבסיס. אם הערך שלילי אזי פתרון לא אופטימלי.

ולכן פתרון לא אופטימלי

**ד.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | היצע | יעדים  3 2 1 | | | מקורות |
| 10 | 20 | 30 | 25 | 10 | 1 |
| 10 | 50 | 14 | 22 | 10 | 2 |
| 16 | 60 | 20 | 20 | 16 | 3 |
|  |  | 40 | 40 | 50 | ביקוש |
|  |  | 4 | 4 | 0 |  |

**ה.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | היצע | יעדים  3 2 1 | | | מקורות |
| 10 | 20 | 16  2 | 25  11 | 10 | 1 |
| 10 | 50 | 14 | 22  8 | 10 | 2 |
| 16 | 60 | 20 | 20 | 18  2 | 3 |
|  |  | 40 | 40 | 50 | ביקוש |
|  |  | 4 | 4 | 0 |  |

ה-1) **הפתרון האופטימלי הנתון הוא יחיד**, כיוון שכל הערכים של המשתנים שלא בבסיס הם חיוביים וגדולים מאפס.

ה-2)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | היצע | יעדים  3 2 1 | | | מקורות |
| 6 | 20 | 12  2 | 21  11 | 6 | 1 |
| 6 | 50 | 10 | 18  8 | 6 | 2 |
| 12 | 60 | 16 | 16 | 14  2 | 3 |
|  |  | 40 | 40 | 50 | ביקוש |
|  |  | 4 | 4 | 0 |  |

ההיגד הנכון הוא היגד מספר 3: **"הפתרון הנתון הוא פתרון אופטימאלי יחיד בעבור הבעיה החדשה".**

שינוי מחיר משנה אך ורק את ערך פונקציית המטרה ולא משנה את הפתרון האופטימלי ולכן התשובה היא ג'. החסרנו מכלל המחירים את אותו הערך, אזי כל הפתרונות קטנו באופן אחיד.

**שאלה 11:**

**א.**

עלויות הובלה מכל מפעל לכל לקוח:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | Y | X | W | V | לקוחות  מפעלים |
| 8 | 12 | 14 | 7 | 9 | A |
| 2 | 4 | 1 | 5 | 11 | B |
| 5 | 4 | 7 | 3 | 6 | C |
| 2 | 11 | 8 | 13 | 7 | D |
| 5 | 14 | 15 | 8 | 16 | E |

נחסיר מאיברי כל שורה את האיבר בעל ערך הנמוך ביותר באותה שורה.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | Y | X | W | V | לקוחות  מפעלים |
| 1 | 5 | 7 | 0 | 2 | A |
| 1 | 3 | 0 | 4 | 10 | B |
| 2 | 1 | 4 | 0 | 3 | C |
| 0 | 9 | 6 | 11 | 5 | D |
| 0 | 9 | 10 | 3 | 11 | E |

נחסיר מאיברי כל עמודה את האיבר בעל ערך הנמוך ביותר באותה עמודה.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | Y | X | W | V | לקוחות  מפעלים |
| 1 | 4 | 7 | 0 | 0 | A |
| 1 | 2 | 0 | 4 | 8 | B |
| 2 | 0 | 4 | 0 | 1 | C |
| 0 | 8 | 6 | 11 | 3 | D |
| 0 | 8 | 10 | 3 | 9 | E |

האיבר המינימלי בטבלה זו (שאינו מכוסה) הינו , נחסיר איבר זה מכל איברי הטבלה שאינם מכוסים, ונחבר אותו לאותם האיברים של הטבלה הנמצאים בנקודות המפגש של הקווים הללו.

נקבל:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | Y | X | W | V | לקוחות  מפעלים |
| 4 | 4 | 7 | 0 | 0 | A |
| 4 | 2 | 0 | 4 | 8 | B |
| 5 | 0 | 4 | 0 | 1 | C |
| 0  0 | 5 | 3 | 8 | 0 | D |
| 0 | 5 | 7 | 0 | 6 | E |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| עלות | הצבה | - |
| 9 | V | A |
| 1 | X | B |
| 4 | Y | C |
| 2 | Z | D |
| 8 | W | E |

מכיוון שהמשתנה z תפוס, נשתמש ב : k 9+1+4+2+8=24

**ב.**

מחירי מכירה של המוצרים:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | Y | X | W | V | לקוחות  מפעלים |
| 17 | 14 | 20 | 14 | 11 | A |
| 13 | 12 | 3 | 13 | 11 | B |
| 14 | 14 | 19 | 5 | 13 | C |
| 15 | 19 | 13 | 17 | 16 | D |
| 19 | 16 | 16 | 12 | 18 | E |

ניצור טבלה חדשה שכל תא יכיל את הערך של ההפרש בין מחיר המכירה (רווח) לבין מחיר ההובלה (הפסד), כלומר: ערך חדש = הפסד - רווח

ונקבל:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | Y | X | W | V | לקוחות  מפעלים |
| 9 | 2 | 6 | 7 | 2 | A |
| 11 | 8 | 2 | 8 | 0 | B |
| 9 | 10 | 12 | 2 | 7 | C |
| 13 | 8 | 5 | 4 | 9 | D |
| 14 | 2 | 1 | 4 | 2 | E |

עלינו למצוא השמה הממקסמת את הרווחים של החברה, כלומר max של הבעיה הנתונה.

max K= -min -k

אזי נהפוך את הטבלה לערכים שליליים:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | Y | X | W | V | לקוחות  מפעלים |
| 9- | 2- | -6 | 7- | 2- | A |
| -11 | -8 | 2- | -8 | 0 | B |
| 9- | -10 | 12- | -2 | 7- | C |
| -13 | -8 | 5- | -4 | 9- | D |
| -14 | 2- | 1- | -4 | 2- | E |

נחסיר מאיברי כל שורה את האיבר בעל ערך הנמוך ביותר באותה שורה.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | Y | X | W | V | לקוחות  מפעלים |
| 0 | 7 | 3 | 2 | 7 | A |
| 0 | 3 | 9 | 3 | 11 | B |
| 3 | 2 | 0 | 10 | 5 | C |
| 0 | 5 | 8 | 9 | 4 | D |
| 0 | 12 | 13 | 10 | 12 | E |

נחסיר מאיברי כל עמודה את האיבר בעל ערך הנמוך ביותר באותה עמודה.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | Y | X | W | V | לקוחות  מפעלים |
| 0 | 5 | 3 | 0 | 3 | A |
| 0 | 1 | 9 | 1 | 7 | B |
| 3 | 0 | 0 | 8 | 1 | C |
| 0 | 3 | 8 | 7 | 0 | D |
| 0 | 10 | 13 | 8 | 8 | E |

האיבר המינימלי בטבלה זו (שאינו מכוסה) הינו , נחסיר איבר זה מכל איברי הטבלה שאינם מכוסים, ונחבר אותו לאותם האיברים של הטבלה הנמצאים בנקודות המפגש של הקווים הללו. נקבל:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | Y | X | W | V | לקוחות  מפעלים |
| 1 | 5 | 3 | 0 | 3 | A |
| 0 | 0 | 8 | 0 | 6 | B |
| 4 | 0 | 0 | 8 | 1 | C |
| 1 | 3 | 8 | 7 | 0 | D |
| 0 | 9 | 12 | 7 | 7 | E |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| עלות | הצבה | - |
| -7 | W | A |
| -8 | Y | B |
| -12 | X | C |
| -9 | V | D |
| -14 | Z | E |

(-7) + (-8) + (-12) + (-9) + (-14) = -50

וכעת max k=- min-k כלומר **max k=50**.